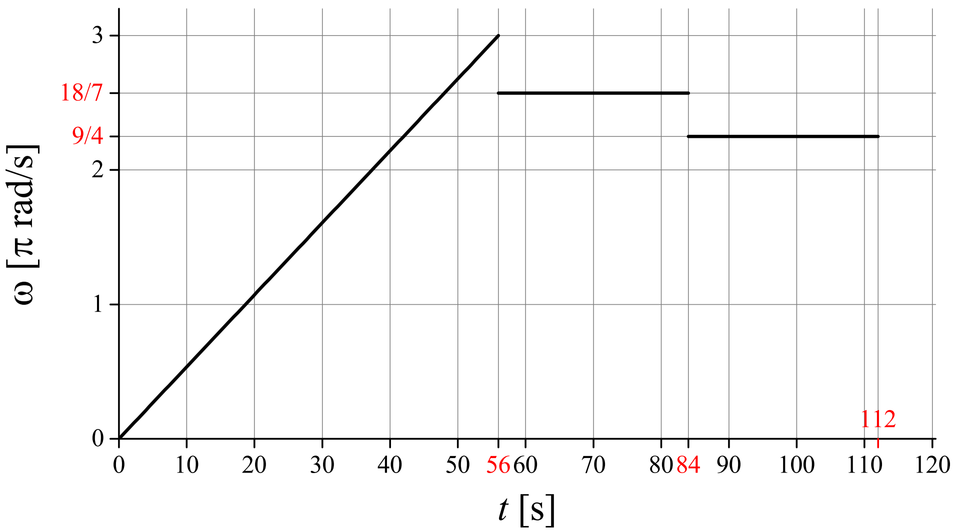
Državno natjecanje iz fizike 2022/2023
Podgora, 9. – 12. svibnja 2023.
Srednje škole – 1. skupina
Rješenja i smjernice za bodovanje

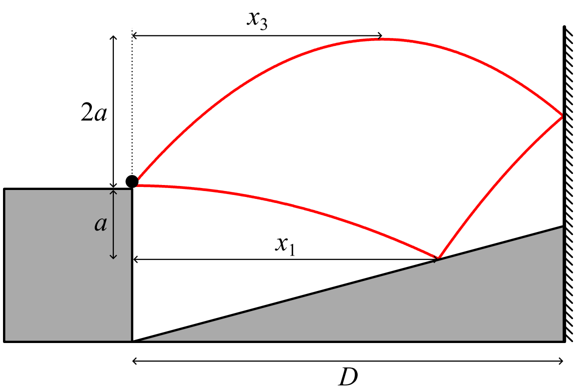
1. zadatak (16 bodova)

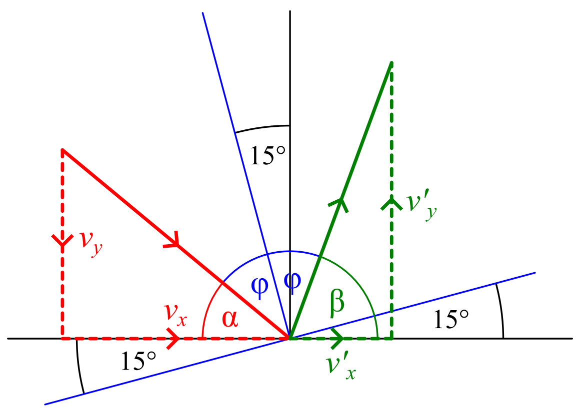
Neka je duljina jednog zuba d, a r_0 polumjer prednjeg zupčanika. Tada vrijedi:
$32d = 2\pi r_0$.
Stražnji zupčanik ima 28 zuba i polumjer r_1 pa vrijedi:
$28d = 2\pi r_1$.
Kada prednji zupčanik napravi jedan okret (zakrene se za kut 2π rad), lanac će se pomaknuti za $32d$. Odredimo za koliki kut će se zakrenuti stražnji zupčanik:
$32d = r_1\varphi = \frac{28d}{2\pi}\varphi \;\Rightarrow\; \varphi = \frac{32}{28}2\pi$ rad. **(2 boda)**
Zaključujemo da je kut zakreta stražnjeg zupčanika veći što je broj zuba stražnjeg zupčanika manji. Za fiksnu brzinu okretanja pedala stražnji zupčanik s najvećim brojem zuba okretat će se najmanjom kutnom brzinom. Prema tome, najveći broj zuba na stražnjem zupčaniku odgovara najmanjoj brzini gibanja bicikla. Biciklist počinje gibanje s lancem na stražnjem zupčaniku s 28 zuba. **(1 bod)**
Odredimo brzinu okretanja pedala, prijeđeni put i vrijeme gibanja u svakoj etapi.
1. etapa – jednoliko ubrzano gibanje, najniža brzina prijenosa:
$\omega_{1,poc} = 0$ rad/s, $\omega_{1,kon} = \frac{32}{28}\omega_{1,pedale,kon} = \frac{32}{28}\cdot\frac{90\cdot 2\pi}{60\text{ s}} = \frac{24}{7}\pi$ rad/s. **(1 bod)**
Prijeđeni put je:
$s_1 = R\frac{\omega_{1,kon}}{2}t_1 = R\cdot\frac{12}{7}\pi\text{ rad/s}\cdot 56\text{ s} = 96R\pi\text{ rad} = 93.8\text{ m}$. **(2 boda)**
2. etapa – jednoliko gibanje, srednja brzina prijenosa:
$\omega_2 = \omega_{1,kon} = \frac{32}{24}\omega_{2,pedale} \;\Rightarrow\; \omega_{2,pedale} = \frac{24}{32}\cdot\frac{24}{7}\pi\text{ rad/s} = \frac{18}{7}\pi$ rad/s. **(1 bod)**
Prijeđeni put jednak je kao u 1. etapi:
$s_2 = R\omega_2 t_2 = s_1$
$R\frac{24}{7}\pi\text{ rad/s}\cdot t_2 = 96R\pi\text{ rad} \;\Rightarrow\; t_2 = 28$ s. **(1 bod)**
3. etapa – jednoliko gibanje, najviša brzina prijenosa:
$\omega_3 = \omega_{1,kon} = \frac{32}{21}\omega_{3,pedale} \;\Rightarrow\; \omega_{3,pedale} = \frac{21}{32}\cdot\frac{24}{7}\pi\text{ rad/s} = \frac{9}{4}\pi$ rad/s. **(1 bod)**
Prijeđeni put jednak je kao u 1. etapi:
$s_3 = R\omega_3 t_3 = s_1$
$R\frac{24}{7}\pi\text{ rad/s}\cdot t_3 = 96R\pi\text{ rad} \;\Rightarrow\; t_3 = 28$ s. **(1 bod)**
Srednja brzina biciklista je:
$\bar{v} = \frac{s_{ukupno}}{t_{ukupno}} = \frac{3\cdot 93.8\text{ m}}{t_1+t_2+t_3} = \frac{281.4\text{ m}}{112\text{ s}} = 2.51$ m/s. **(2 boda)**
Graf ovisnosti kutne brzine okretanja pedala o vremenu prikazan je na slici. Točno označene osi na grafu: 1 bod, točno nacrtan graf za svaku etapu gibanja: 1 bod; ukupno **4 boda** za graf.



2. zadatak (20 bodova)

Na slici lijevo prikazana je putanja loptice i označene su udaljenosti koje se koriste u rješavanju zadatka. Na slici desno prikazana je brzina loptice neposredno prije udara u kosinu i neposredno nakon odbijanja od kosine. Brzine su rastavljene na horizontalnu i vertikalnu komponentu te su označeni kutevi koji se koriste u rješavanju zadatka.





Neposredno prije udara u kosinu loptica ima brzinu:
$v^2 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, **(1 bod)**
gdje su horizontalna i vertikalna komponenta brzine redom jednake:
$v_x = v_0$ **(1 bod)** i
$a = \dfrac{v_y^2}{2g} \;\Rightarrow\; v_y = \sqrt{2ga}$. **(1 bod)**
Neposredno nakon odbijanja od kosine iznos brzine loptice je isti kao neposredno prije udara u kosinu, ali se horizontalna i vertikalna komponenta brzine mijenjaju:
$v^2 = \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2}$.
Dalje se loptica giba prema zidu stalnom horizontalnom komponentom brzine v_x' i vertikalnom komponentom brzine koja se jednoliko smanjuje od početne vrijednosti v_y'. Nakon odbijanja loptice od zida horizontalna komponenta brzine mijenja smjer, a iznosi pojedinih komponenti brzina prije i nakon odbijanja od zida ostaju isti. Slijedi da je točka maksimalne visine loptice određena hicem u vis početnom brzinom v_y':

$a + 2a = \dfrac{v_y'^2}{2g}$. **(1 bod)**

$3a = 3\dfrac{v_y^2}{2g} = \dfrac{v_y'^2}{2g} \ \Rightarrow\ v_y' = \sqrt{3}v_y$. **(1 bod)**

Kao što je prikazano na slici loptica upada pod kutem φ u odnosu na okomicu na kosinu te se od kosine odbije pod istim kutem. Vrijede sljedeće jednadžbe:

$\sin\alpha = \dfrac{v_y}{v}$, $\cos\alpha = \dfrac{v_x}{v}$,

$\sin\beta = \dfrac{v_y'}{v}$, $\cos\beta = \dfrac{v_x'}{v}$

Sa slike možemo vidjeti da je odnos kuteva sljedeći:

$\alpha + 2\varphi + \beta = 180°$,

$\alpha + \varphi + 15° = 90°$,

$\varphi + \beta - 15° = 90°$.

Iz prethodnih jednadžbi slijedi da je $\beta - \alpha = 30°$. **(2 boda)** Također vrijedi:

$\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \dfrac{v_y'}{v_y} = \sqrt{3}$. **(2 boda)**

Nadalje slijedi:

$\dfrac{\sin(\alpha + 30°)}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin\alpha\cos 30° + \cos\alpha\sin 30°}{\sin\alpha} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \sqrt{3}$.

Sređivanjem se dobije:

$\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \sqrt{3} \ \Rightarrow\ \alpha = 30°$. **(2 boda)**

Iz prethodnog slijedi da je $\beta = 60°$ i kut upada loptice na kosinu $\varphi = 45°$. **(1 bod)**

Najveću brzinu loptica ima u najnižoj točki gibanja, odnosno u točki udara u kosinu i ona iznosi:

$v_{max} = v = \dfrac{v_x}{\cos 30°} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}v_0$. **(1 bod)**

Najmanju brzinu loptica ima u najvišoj točki gibanja i ona iznosi:

$v_{min} = v_x' = v\cos 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}}v_0$. **(1 bod)**

Neka je D horizontalna udaljenost početne točke i vertikalnog zida. Gibanje loptice podijelimo u tri etape:

1. Od početne točke do udara u kosinu.
2. Od udara u kosinu do najviše točke gibanja.
3. Od najviše točke do početne točke.

Vrijeme pojedine etape gibanja je:

$t_1 = \dfrac{v_y}{g}$,

$t_2 = \dfrac{v_y'}{g} = \sqrt{3}\dfrac{v_y}{g}$,

$t_3 = \dfrac{\sqrt{v_0^2 - v_x'^2}}{g} = \dfrac{\sqrt{3v_y^2 - v_y^2}}{g} = \sqrt{2}\dfrac{v_y}{g}$.

Horizontalne udaljenosti koje loptica prijeđe u etapama 1. i 3. su:

$x_1 = v_x t_1 = \sqrt{3}v_y \cdot \dfrac{v_y}{g} = 2\sqrt{3}a$, **(2 boda)**

$x_3 = v_x' t_3 = v_y \cdot \sqrt{2}\dfrac{v_y}{g} = 2\sqrt{2}a$. **(2 boda)**

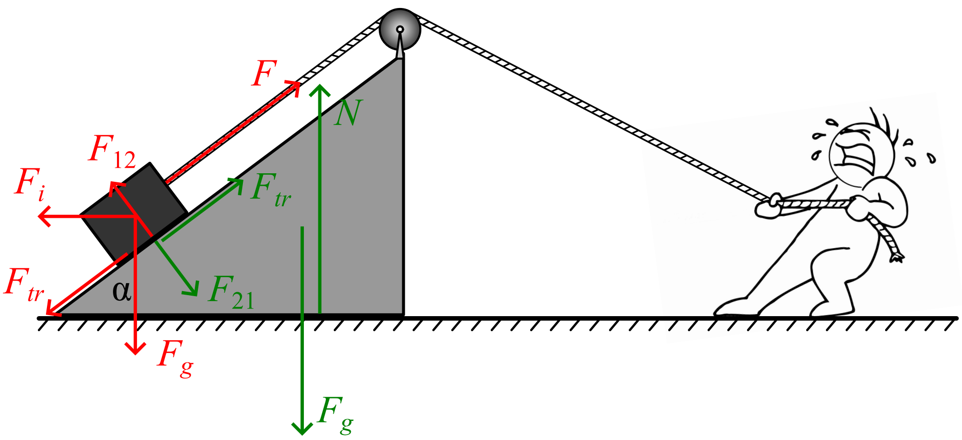
Za etapu 2. postavimo sljedeću jednadžbu:

$D - x_1 + D - x_3 = v_x' t_2 = v_y \cdot \sqrt{3}\dfrac{v_y}{g} = 2\sqrt{3}a$.

$2D = 2\sqrt{3}a + x_1 + x_3 = (4\sqrt{3} + 2\sqrt{2})a \ \Rightarrow\ D = (2\sqrt{3} + \sqrt{2})a$. **(2 boda)**

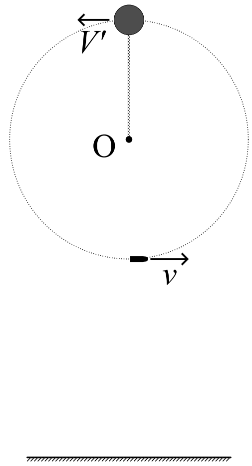
3. zadatak (17 bodova)

Na slici su prikazane sile koje djeluju na kosinu (zeleno) i sile koje djeluju na ciglu u sustavu kosine (crveno). Točno nacrtani dijagrami sila: **2 boda**. Označimo masu kosine s m_1 i masu cigle s m_2.



Drugi Newtonov zakon za gibanje kosine:
$m_1 a = F_{21} \sin\alpha + F_{tr} \cos\alpha$. **(1 bod)**
Drugi Newtonov zakon za gibanje cigle u sustavu kosine:
$m_2 a' = F - F_g \sin\alpha - F_{tr} - F_i \cos\alpha$, **(1 bod)**
$0 = F_{12} + F_i \sin\alpha - F_g \cos\alpha$. **(1 bod)**
Inercijalna sila je $F_i = m_2 a$. **(1 bod)** Zbog trećeg Newtonovog zakona vrijedi $F_{21} = F_{12}$. **(1 bod)** Sila trenja je $F_{tr} = \mu F_{12}$. **(1 bod)**
Iz treće jednadžbe slijedi:
$F_{12} = m_2 g \cos\alpha - m_2 a \sin\alpha$. **(1 bod)**
Uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobije se:
$m_1 a = m_2 g \sin\alpha\cos\alpha - m_2 a \sin^2\alpha + \mu m_2 g \cos^2\alpha - \mu m_2 a \sin\alpha\cos\alpha$,
$\frac{m_1}{m_2} a = g \sin\alpha\cos\alpha - a\sin^2\alpha + \mu g\cos^2\alpha - \mu a \sin\alpha\cos\alpha$.
Uvrstimo $\frac{m_1}{m_2} = 2$, $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$:
$2a = g\frac{12}{25} - a\frac{9}{25} + \mu g\frac{16}{25} - \mu a\frac{12}{25}$,
$(50 + 9 + 12\mu)\, a = (12 + 16\mu)\, g$.
Uvrstimo $\mu = 0.25$:
$62a = 16g$,
$a = \frac{8}{31} g = 2.58\ \mathrm{m/s^2}$. **(4 boda)**
Iz uvjeta da se cigla giba stalnom brzinom slijedi $a' = 0$. **(1 bod)** Sila F tada je jednaka:
$F = m_2 g \sin\alpha + \mu m_2 g\cos\alpha - \mu m_2 a \sin\alpha + m_2 a \cos\alpha$,
$F = m_2 g\,(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) + m_2 a\,(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)$,
$F = m_2 \frac{1}{5}\left[(3 + 0.25\cdot 4)\, g + (4 - 0.25\cdot 3)\, a\right]$,
$F = m_2 \frac{1}{5}\left[4g + 3.25\cdot\frac{8}{31} g\right]$,
$F = m_2 \frac{1}{5}\left(4 + \frac{26}{31}\right) g$,
$F = \frac{30}{31} g = 9.68\ \mathrm{N}$. **(3 boda)**

4. zadatak (17 bodova)



Nakon prolaska kroz kuglu metak se giba prema desno i pada na tlo s visine $h = h_O - r = 4.1\ \mathrm{m} - 0.9\ \mathrm{m} = 3.2\ \mathrm{m}$. **(1 bod)** Vrijeme pada metka je:

$h = \frac{1}{2}gt^2 \ \Rightarrow \ t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0.8\ \mathrm{s}.$ **(1 bod)**

Pritom je metak prešao horizontalnu udaljenost:

$x = vt = 200\ \mathrm{m/s} \cdot 0.8\ \mathrm{s} = 160\ \mathrm{m}.$ **(1 bod)**

Nakon što pukne nit kugla se giba prema lijevo i pada s visine $H = h_O + r = 4.1\ \mathrm{m} + 0.9\ \mathrm{m} = 5\ \mathrm{m}$. **(1 bod)** Vrijeme pada kugle je:

$H = \frac{1}{2}gT^2 \ \Rightarrow \ T = \sqrt{\frac{2H}{g}} = 1\ \mathrm{s}.$ **(1 bod)**

Horizontalna udaljenost položaja pada metka i kugle na tlo je:

$d = 168\ \mathrm{m} = x + V'T.$ **(1 bod)**

Slijedi da je brzina kugle u trenutku pucanja niti jednaka:

$V' = \frac{168\ \mathrm{m} - x}{T} = \frac{168\ \mathrm{m} - 160\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{s}} = 8\ \mathrm{m/s}.$ **(1 bod)**

Brzinu kugle neposredno nakon prolaska metka izračunamo pomoću zakona očuvanja energije:

$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}MV^2 + Mg2r,$ **(1 bod)**

$V^2 = V'^2 + 4gr,$

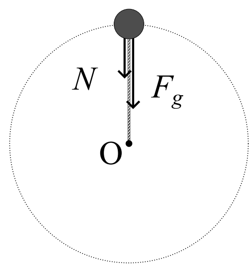
$V = \sqrt{V'^2 + 4gr} = 10\ \mathrm{m/s}.$ **(1 bod)**

Zakon očuvanja količine gibanja za sudar metka i kugle glasi

$mv_0 = mv + MV.$ **(1 bod)**

Uvrštavanjem poznatih veličina izračunamo početnu brzinu metka:

$v_0 = v + \frac{M}{m}V = 200\ \mathrm{m/s} + \frac{1}{0.08}10\ \mathrm{m/s} = 325\ \mathrm{m/s}.$ **(1 bod)**



U najvišoj točki putanje na kuglu djeluje gravitacijska sila i sila napetosti užeta. S obzirom na to da se kugla giba po kružnici ukupna sila na kuglu je centripetalna sila.

$F_{cp} = mg + N.$ **(1 bod)**

Slijedi da je napetost niti neposredno prije pucanja:

$N = F_{cp} - Mg = M\frac{V'^2}{r} - Mg = M\left(\frac{V'^2}{r} - g\right) = 61.1\ \mathrm{N}.$ **(1 bod)**

Kinetička energija metka neposredno prije sudara s kuglom je:

$E_{k0} = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 0.08\ \mathrm{kg} \cdot (325\ \mathrm{m/s})^2 = 4225\ \mathrm{J}.$ **(1 bod)**

Ukupna energija neposredno nakon prolaska metka kroz kuglu je:

$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2} \cdot 0.08\ \mathrm{kg} \cdot (200\ \mathrm{m/s})^2 + \frac{1}{2} \cdot 1\ \mathrm{kg} \cdot (10\ \mathrm{m/s})^2 = 1650\ \mathrm{J}.$ **(1 bod)**

Razlika početne kinetičke energije metka i ukupne energije neposredno nakon prolaska metka kroz kuglu jednaka je gubitku energije:

$Q = 4225\ \mathrm{J} - 1650\ \mathrm{J} = 2575\ \mathrm{J},$ **(1 bod)**

što je $\frac{2575}{4225} = 61\%$ početne kinetičke energije metka. **(1 bod)**