Državno natjecanje iz fizike, 2023.
Rješenja i smjernice za bodovanje – 3. skupina

1. zadatak (20 bodova)

Poznato nam je da se radi o harmoničkom oscilatoru koji u trenutku $t = 0$ nije ni u ravnotežnom ni u maksimalnom položaju. Jednadžbu položaja i brzine u ovisnosti o vremenu za takav oscilator možemo pisati s: **(2 boda)**

$$x(t) = x_M \sin(\omega t + \varphi)$$
$$v(t) = v_M \cos(\omega t + \varphi)$$

S obzirom da je uteg privezan s dvije opruge, jednake konstante opruge, na uteg djeluju istovremeno dvije jednake sile. Efektivno, to odgovara harmoničkom oscilatoru s konstantom opruge $K = k + k$. U daljnjem rješavanju zadatka koristit ćemo K. **(3 boda)**

Znamo da u trenutku $t = 0$ je:

$$x(0) = 3\text{ cm} = x_M \sin\varphi$$
$$v(0) = 10\text{ cm/s} = v_M \cos\varphi$$

Početni kut φ možemo odrediti preko energije, za koju zbog zakona očuvanja energije vrijedi:

$$E = \frac{1}{2}Kx_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2$$
$$E = \frac{1}{2}Kx_M^2\sin^2\varphi + \frac{1}{2}mv_M^2\cos^2\varphi$$
$$E = \frac{1}{2}Kx_M^2$$
$$E = \frac{1}{2}mv_M^2$$

Kombinacijom ovih jednadžbi možemo dobiti izraz za kut φ: **(3 boda)**

$$\tan\varphi = \pm\sqrt{3}$$

za koji ima više rješenja, no s obzirom da znamo da je tijelo u povratku u ravnotežu, možemo zaključiti da se radi o drugom kvadrantu, pa je rješenje $\varphi = 120°$. **(3 boda)**

Iz kuta φ možemo dobiti potrebne podatke o vremenu preostalom do ravnoteže: za ravnotežu harmonički oscilator mora prijeći *fazni put* od $120°$ do $180°$, pa možemo pisati: **(3 boda)**

$$\omega t = \frac{\pi}{3}$$

Dobije se $t = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{K}}$, $t = 0.181$ s. **(2 boda)**

Iz izraza za energije možemo naći i:

$x_M = \sqrt{\frac{2E}{K}} = 3.464$ cm. **(2 boda)**

$v_M = \sqrt{\frac{2E}{m}} = 20$ cm/s. **(2 boda)**

2. zadatak (16 bodova)

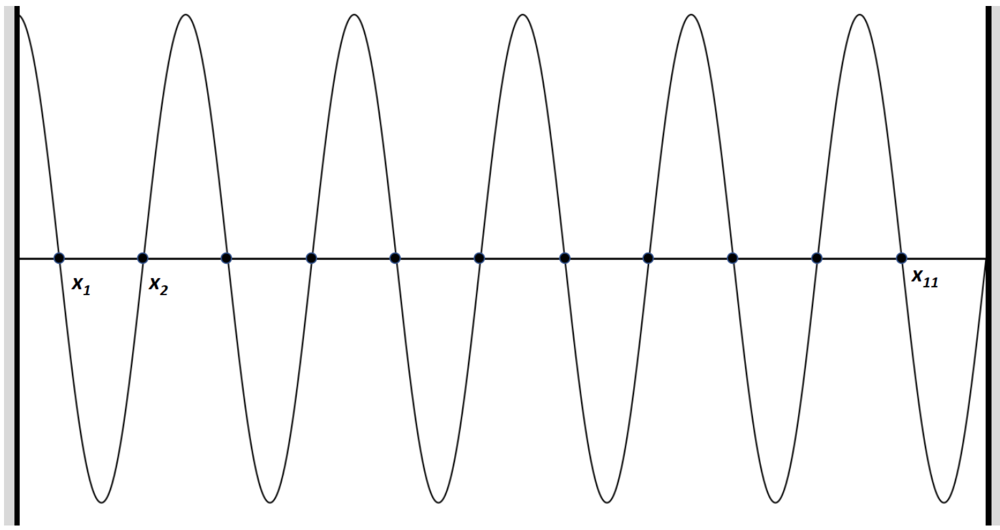
Radi se o sviralima duljine L, s jednim krajem otvorenim a drugim zatvorenim. **(2 boda)**
Rezonancije stojnog vala proizvode efekte utišavanja zvuka, pa možemo zaključiti da se na koncertu upravo to dogodilo, formirao se stojni val između pozornice i brda. **(2 boda)**
Vrijednosti valnih duljina stojnog vala u takvim sviralima su: **(2 boda)**

$$\lambda_n = \frac{4L}{2n-1}\ , n \in \mathbb{N}$$

gdje je n redni broj za koji je broj čvorova povezan relacijom $N_v = n - 1$. **(2 boda)**
Kako je protagonist izbrojao 11 položaja destruktivne interferencije, čvorova, zaključujemo da se radi o stojnom valu valne duljine λ_{12}. Znajući da se radi o frekvenciji $f = 20$ Hz, možemo naći i $\lambda_{12} = \frac{c}{f} = 17.5$ m. **(2 boda)**
Uvrštavanjem možemo dobiti izraz za duljinu $L = 98.6$ m. **(2 boda)**
Položaj nultočaka možemo očitati sa skice (dolje). Općenito vrijedi za nultočku x_n: **(2 boda)**

$$x_n = \frac{(2n-1)\lambda}{4}$$

Skica (nije potrebno da bude cijela, može se shematski prikazati početak i kraj): **(2 boda)**



Vrijednosti položaja nultočaka, uključujući i ukupnu duljinu prostora kao 12. vrijednost (nisu nužne za bodove):

4.287	12.862	21.438	30.012
38.587	47.162	55.737	64.312
72.887	81.462	90.037	98.612

3. zadatak (16 bodova)

Razmišljajući o međusobnoj rotaciji elemenata bicikla, ako djelujemo silom na donju pedalu prema natrag kotač će se htjeti okrenuti tako da pogoni bicikl prema naprijed, ali istovremeno će naša sila povlaćenja gurati bicikl nazad. **(4 boda)**
Pratimo elemente bicikla od povlačne sile koja stvara moment na prednji lančanik: **(2 boda)**

$$M_l = F_P a$$

Moment stvara silu na lanac bicikla: **(2 boda)**

$$M_l = F_l r$$

Lanac bicikla povlači istom tom silom stražnji lančanik i stvara moment na stražnjem kotaču: **(2 boda)**

$$M_R = F_l R$$

Stražnji kotač djeluje silom na podlogu u smjeru bicikla prema naprijed: **(2 boda)**

$$M_R = F_k P$$

Ukupni odnos sile povlaćenja i sile kotača je: **(2 boda)**

$$F_k = \frac{Ra}{Pr} F_p$$

Za realne vrijednosti bicikla imamo $F_k = 0.41 F_p \Rightarrow F_k < F_p$. Bicikl će se kretati unatrag. **(2 boda)**

4. zadatak (18 bodova)

Počinjemo od momenta inercije diska: $I = \frac{1}{2} m r^2$. **(2 boda)**
Moment inercije ovakvog tijela možemo dobiti iz metode *oduzimanja mase*. Naime, ako zamislimo da počnemo od diska s rupom i dodamo mu mali disk d da dobijemo moment inercije punog diska D, možemo pisati: **(2 boda)**

$$I_D = I + I_{d\|}$$

S obzirom da moment oko centra mase nije jednak momentu rotacije oko paralelne osi, to smo naglasili tako da smo za mali disk gledali da se rotira oko paralelne osi. Tada za mali disk vrijedi, po teoremu o paralelnim osima: **(2 boda)**

$$I_{d\|} = I_d + \left(\frac{2R}{3}\right)^2 m_d$$

Masu malog diska moramo izračunati iz podatka da je disk homogen, što znači da ima jedinstvenu gustoću koju možemo izraziti preko mase punog diska D: $M = \rho R^2 \pi$ i iz nje naći masu malog diska: **(2 boda)**

$$m = \rho \left(\frac{R}{3}\right)^2 \pi = \frac{M}{9}$$

Uvrštavanjem u formule dolazimo do izraza za traženi moment inercije: **(4 boda)**

$$I = I_D - \left(I_d + \left(\frac{2R}{3}\right)^2 \frac{M}{9}\right)$$

$$I = \frac{4}{9} M R^2$$

Centar mase pronalazimo na sličan način. Centar mase punog diska bi bio u njegovom središtu, a dobije se iz centra mase diska s rupom i malog diska. Kako je centar mase s rupom sa suprotne strane malog diska, pišemo: **(4 boda)**

$$\left(M - \frac{M}{9}\right) x_{cm} = \frac{M}{9}\frac{2R}{3}$$

Centar mase je tada: $x_{cm} = \frac{R}{12}$ **(2 boda)**