DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE 2022/2023

Srednje škole 4. grupa

Rješenja i upute za bodovanje

VAŽNO: Ovdje je prikazan jedan način rješavanja zadataka. Ako učenici riješe zadatak drukčijim, a fizikalno ispravnim načinom, treba im dati puni broj bodova predviđen za taj zadatak. Ako učenici ne napišu posebno svaki ovdje predviđeni korak, a vidljivo je da su ga napravili, treba im dati bodove kao da su ga napisali.

1. zadatak *(15 bodova)*

a.) Produkt α-raspada ima 4 nukleona manje od početnog izotopa (2 protona i 2 neutrona). Produkt β^--raspada ima dodatni proton naspram počenog izotopa, ali je broj nukleona očuvan. **[1 bod]**
Dakle, slijedi:

$$\Delta A = -4N(\alpha) \tag{1}$$
$$\Delta Z = -2N(\alpha) + N(\beta^-) \quad [\mathbf{2\,bod}]. \tag{2}$$

Pb-207 ima 28 nukleona manje od početnog U-235 izotopa, tj. 10 protona manje. Uvrštavanjem u (1) i (2) slijedi: $N(\alpha) = 7$ i $N(\beta^-) = 4$. **[1 bod]**

b.) S obzirom da je vrijeme poluraspada izotopa uranija puno veće od vremena poluraspada ostalih izotopa u serijama, vrlo dobra aproksimacija je razmatrati procese kao direktne raspade izotopa uranija u izotope olova. Tada prema zakonu radioaktivnog raspada možemo napisati sljedeće vremenske ovisnosti broja pojedinih izotopa u uzorku:

$$N(U-235) = N_0(U-235)\exp(-\lambda_{235}t), \tag{3}$$
$$N(U-238) = N_0(U-238)\exp(-\lambda_{238}t), \tag{4}$$
$$N(Pb-207) = N_0(U-235)\,[1-\exp(-\lambda_{235}t)], \tag{5}$$
$$N(Pb-206) = N_0(U-238)\,[1-\exp(-\lambda_{238}t)], \tag{6}$$

gdje je $\lambda_{238} = \frac{\ln 2}{t_{1/2,\,238}}$ i $\lambda_{235} = \frac{\ln 2}{t_{1/2,\,235}}$; $t_{1/2,\,X}$ je vrijeme poluraspada izotopa X, a $N_0(X)$ je početni broj izotopa X. **[3 boda]**
Zadani omjeri su tada:

$$\frac{N(U-235)}{N(U-238)} = \frac{N_0(U-235)}{N_0(U-238)}\exp[-t(\lambda_{235}-\lambda_{238})], \tag{7}$$
$$\frac{N(Pb-207)}{N(U-235)} = \frac{1-\exp(-\lambda_{235}t)}{\exp(-\lambda_{235}t)}. \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{8}$$

Iz jednadbe (8) možemo dobiti starost uzorka:

$$t = \frac{1}{\lambda_{235}}\ln\left[\frac{N(Pb-207)}{N(U-235)}+1\right] = \frac{t_{1/2,\,235}}{\ln 2}\ln\left[\frac{N(Pb-207)}{N(U-235)}+1\right] = 1.465\,\text{mlrd. god.} \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{9}$$

Također je tada jednostavno dobiti početne omjere izotopa uranija:

$$\frac{N_0(U-235)}{N_0(U-238)} = \frac{N(U-235)}{N(U-238)}\exp[t(\lambda_{235}-\lambda_{238})] = 0.013 \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{10}$$

c.) Promjena broja izotopa Pa-231 u vremenskom intervalu Δt je dana razlikom aktivnosti U-235 i Pa-231:

$$\frac{\Delta N(Pa-231)}{\Delta t} = \lambda_{235} N(U-235) - \lambda_{231} N(Pa-231). \quad [\textbf{2 boda}] \tag{11}$$

S obzirom da je $t_{1/2,\,235} \gg t_{1/2,\,231}$ broj izotopa $U-235$ će biti gotovo konstantan na vrenenskoj skali na kojoj broj Pa-231 izotopa može značajno varirati. Iz toga možemo zaključiti da je $\Delta N(Pa-231)/\Delta t > 0$ sve dok vrijedi $N(Pa-231)/N(U-235) < \lambda_{235}/\lambda_{231}$, tj. broj Pa-231 izotopa raste sve dok ne dosegne takvu vrijednost da je omjer broja Pa-231 i U-235 jednak:

$$\frac{N(Pa-231)}{N(U-235)} = \frac{\lambda_{235}}{\lambda_{231}} = \frac{t_{1/2,\,231}}{t_{1/2,\,235}} = 4.65 \times 10^{-5}. \quad [\textbf{3 boda}]. \tag{12}$$

Egzaktnim rjeašavanjem jednadžbe (11) (gdje $\Delta t \to 0$) i korištenjem (3) uvidjeli bi da se omjer broja Pa-231 i U-235 izotopa asimptotski približava $\lambda_{235}/(\lambda_{231} - \lambda_{235}) \approx \lambda_{235}/\lambda_{231}$ kada $t \to \infty$.

2. zadatak *(17 bodova)*

a.) Promotri prikaz na slici 1. Kut ϕ je upadni kut zrake na mikrosferu, γ je kut između upadne zrake i horizontale, γ' je kut izlazne zrake u odnosu na horizontalu, β je kut pod kojim se zraka svjetlosti lomi. Kut refleksije (na aluminiju) je također β što se može zaključiti iz dane geometrije. Korisno je odrediti ukupni kut devijacije zrake. On iznosi:

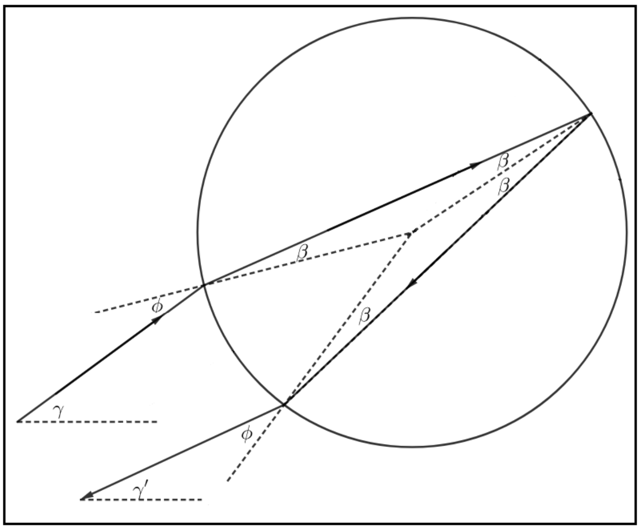
$$\Delta = (\phi - \beta) + (\pi - 2\beta) + (\phi - \beta) = \pi + 2\phi - 4\beta, \quad [\textbf{3 boda}] \tag{13}$$

gdje je Δ pozitivan kada se zraka zakreće u smjeru kazaljke na satu. Da povratna zraka upadne u vozačeve oči mora vrijediti:

$$\Delta = \pi + \gamma - \gamma', \quad \gamma = \arctan\left(\frac{h_3 - h_2}{L - x}\right), \quad \gamma' = \arctan\left(\frac{h_3 - h_1}{L}\right), \quad [\textbf{1 bod}] \tag{14}$$

Kombiniranjem (13) i (14) i korištenjem Snellovog zakona ($\sin\phi = n_m \sin\beta$) napokon slijedi:

$$2\phi - 4\arcsin\left(\frac{\sin\phi}{n_m}\right) = \arctan\left(\frac{h_3 - h_2}{L - x}\right) - \arctan\left(\frac{h_3 - h_1}{L}\right). \quad [\textbf{2 boda}] \tag{15}$$



Slika 1: Upadna zraka se lomi na mikrosferi, zatim reflektira na drugom kraju, te ponovno lomi.

Nadalje, možemo koristiti zadane aproksimacije čime jednadžba (15) prelazi u:

$$\frac{2(n_m^2 - 1)}{3n_m^3}\phi^3 + \left(2 - \frac{4}{n_m}\right)\phi + \frac{h_3 - h_1}{L} - \frac{h_3 - h_2}{L - x} = 0. \quad [\textbf{1 bod}] \tag{16}$$

Za zadani $n_m = 2$ član uz ϕ iščezava, te slijedi (uvrštavanjem ostalih zadanih parametara):

$$\phi = \sqrt[3]{4\left(\frac{h_3-h_2}{L-x} - \frac{h_3-h_1}{L}\right)} = 0.38\,\mathrm{rad}\,(21.8\,^\circ) \quad [\mathbf{2\,boda}] \tag{17}$$

b.) Ako promotrimo upadnu svjetlost na dvije susjedne mikrosfere (jedna na visini $h_3 + Nd$, a druga na visini $h_3 + (N+1)d$), razlika puteva tih zraka je:

$$x_1 = \sqrt{(L-x)^2 + [h_3 + (N+1)d - h_2]^2} - \sqrt{(L-x)^2 + (h_3 + Nd - h_2)^2} \approx \frac{h_3-h_2}{L-x}\,d, \quad [\mathbf{3\,boda}] \tag{18}$$

kada iskoristimo $(1+x)^n \approx 1 + nx$ za $x \ll 1$ uz činjenicu da je $L - x$ puno veći od ostalih dimenzija, te zanemarimo članove proporcionalne d^2.
Slično možemo dobiti razliku puteva za dvije zrake od mikrosfere do vozačevih očiju:

$$x_2 = \sqrt{L^2 + [h_3 + (N+1)d - h_1]^2} - \sqrt{L^2 + (h_3 + Nd - h_1)^2} \approx \frac{h_3-h_1}{L}\,d. \quad [\mathbf{3\,boda}] \tag{19}$$

Minimalna udaljenost mikrosfera za koju se postigne konstruktivna interferencija za svjetlost valne duljine λ je tada:

$$\lambda = x_1 + x_2 \;\rightarrow\; d = \lambda\left(\frac{h_3-h_1}{L} + \frac{h_3-h_2}{L-x}\right)^{-1} = 8.626\,\mu\mathrm{m}. \quad [\mathbf{2\,boda}] \tag{20}$$

3. zadatak *(18 bodova)*

a.) Udaljenost na koju se protoni mogu klasično približiti je dana s jednakošću:

$$\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = E_{cm}. \quad [\mathbf{2\,boda}] \tag{21}$$

Iz toga slijedi za vjerojatnost tuneliranja:

$$P(E_{cm}) \propto \exp\left(-a\sqrt{\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 E_{cm}}}\right). \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{22}$$

b.) Brzina reakcije za protone energije E_{cm} proporcionalna je umnošku vjerojatnosti da protoni energije E_{cm} tuneliraju kroz potencijalnu barijeru i vjerojatnosti da je njihova energija jednaka E_{cm}:

$$F(E_{cm}) \propto P(E_{cm})n(E_{cm}) \propto \exp\left(-a\sqrt{\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 E_{cm}}} - \frac{E_{cm}}{kT}\right). \quad [\mathbf{2\,boda}] \tag{23}$$

$P(E_{cm})$ je funkcija koja teži u nulu kada je E_{cm} mali, a za velike E_{cm} se polako približava maksimalnoj vrijednosti, dok je $n(E_{cm})$ "obična" padajuća eksponencijalna funkcija koja se za velike vrijednosti približava nuli. Dakle, njihov umnožak će težiti u nulu kada E_{cm} teži u nulu i za velike E_{cm}, a između tih vrijednosti će postići maksimum, kao što vidimo na slici 2. **[2 boda]**
Nagib funkcije iznosi nula na poziciji maksimuma, tj. za energiju na kojoj se postiže maksimum vrijedi:

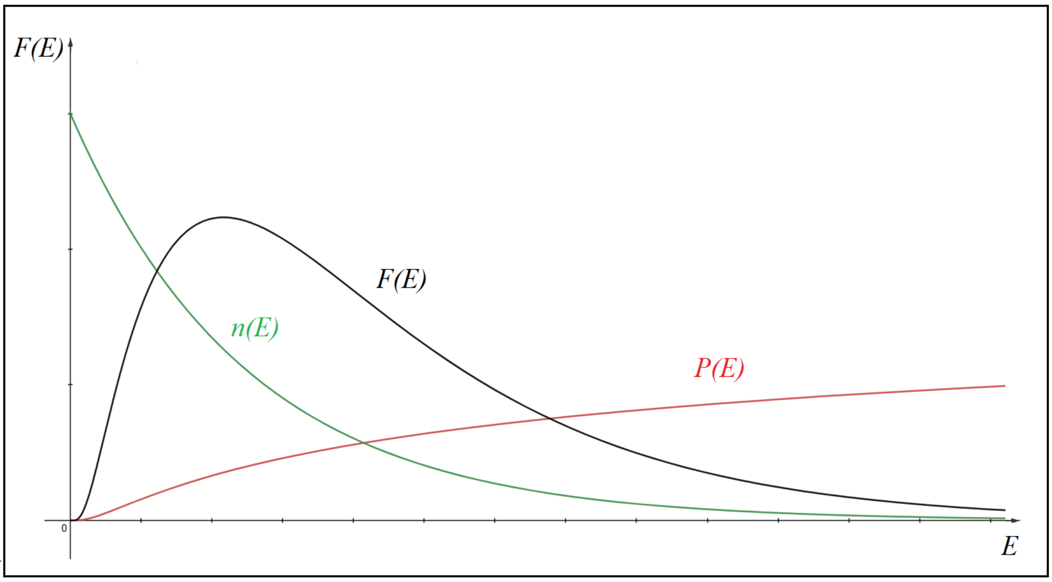
$$\lim_{\Delta E \to 0} \frac{\left(\frac{-\alpha}{\sqrt{E_{cm}+\Delta E}} - \frac{E_{cm}+\Delta E}{kT}\right) - \left(\frac{-\alpha}{\sqrt{E_{cm}}} - \frac{E_{cm}}{kT}\right)}{\Delta E} = 0; \quad \alpha = a\sqrt{\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0}}. \quad [\mathbf{2\,boda}] \tag{24}$$

Koristeći $(1+x)^n \approx 1 + nx$ za $x \ll 1$ za prvi član u prvoj zagradi i sređivanjem dobivamo:

$$\frac{\alpha}{2E_{cm}\sqrt{E_{cm}}} - \frac{1}{kT} = 0 \;\rightarrow\; E_{cm} = \left(\frac{\alpha k T}{2}\right)^{2/3} \quad [\mathbf{2\,boda}] \tag{25}$$

Za jezgru Sunca se uvrštavanjem parametara dobije da je brzina reakcija najveća za:

$$E_{cm} = 9.43 \times 10^{-16}\,\mathrm{J}\ (5.9\,\mathrm{keV}). \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{26}$$



Slika 2: Brzina reakcije u ovisnosti o energiji dvaju protona.

c.) Uvrstimo li uvjet na energiju iz (25) u (23) dobivamo da je brzina reakcije:

$$F(E_{cm}) \propto \exp\Big[-(2^{1/3} + 2^{-2/3})\alpha^{2/3}(kT)^{-1/3}\Big]. \quad [\mathbf{2\,boda}] \tag{27}$$

Faktor proporcionalnosti ovisi o tome koliko parova protona postoji u nekom malom volumenu, što je onda proporcionalno kvadratu gustoće. **[3 boda]**

Tada vrijedi da je omjer brzina reakcija jednak:

$$\frac{r_{0.5}}{r_{\text{jezgra}}} = \frac{1}{100^2}\,\frac{\exp\big[-(2^{1/3} + 2^{-2/3})\alpha^{2/3}(kT_{0.5})^{-1/3}\big]}{\exp\big[-(2^{1/3} + 2^{-2/3})\alpha^{2/3}(kT_{\text{jezgra}})^{-1/3}\big]} = 2.37 \times 10^{-7}. \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{28}$$

Može se zaključiti da se *pp* proces odvija gotovo isključivo u jezgri Sunca.

4. zadatak *(20 bodova)*

a.) Za nerelativistički elektron zakon očuvanja mehaničke energije glasi:

$$\frac{p_0^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} + mgH \ \Rightarrow\ \frac{h^2}{2m\lambda_0^2} = \frac{h^2}{2m\lambda^2} + mgH, \quad [\mathbf{2\,boda}] \tag{29}$$

gdje je p_0 impuls elektrona na visini x, a p na visini $H + x$. Sređivanjem izraza dobivamo:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_0}\sqrt{1 - \frac{2m^2 gH\lambda_0^2}{h^2}}. \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{30}$$

Faza snopa elektrona koji prijeđe malu udaljenost Δl se promjeni za $2\pi\Delta l/\lambda(l)$, gdje je $\lambda(l)$ valna duljina snopa na promatranom dijelu puta. Promatrajući dva snopa elektrona vidimo da se njihove putanje razlikuju na intervalu razdjelnik-zrcalo-razdjelnik. Jedan od snopova na tom intervalu je konstante valne duljine (jer je na konstantnoj visini koju možemo prozvati visinom 0), dok se visina drugog snopa mijenja od 0 do $L\sin\psi$, te nazad do 0. Dakle, za prvi snop ukupna promjena faze je:

$$\Delta\phi_1 = \frac{2\pi\Delta l}{\lambda_0} \ \Rightarrow\ \phi_1 = \frac{4\pi L}{\lambda_0} \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{31}$$

Za drugi snop promjena faze na malom dijelu na visini H je:

$$\Delta\phi_2(H) = \frac{2\pi\Delta l}{\lambda_0}\sqrt{1 - \frac{2m^2 gH\lambda_0^2}{h^2}} \approx \frac{2\pi\Delta l}{\lambda_0}\left(1 - \frac{m^2 gH\lambda_0^2}{h^2}\right), \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{32}$$

gdje smo koristili $(1+x)^n \approx 1 + nx$ za $x \ll 1$. Prvi član nema ovisnost o H dok je drugi linearan u H. Sumiranjem svih doprinosa na cijelom intervalu slijedi da prvi član jednostavno treba pomnožiti sa $2L$, a doprinos drugog člana je jednak onomu koji bi dobili da uzmemo $H = const = L\sin\psi/2$ (prosječna visina) i pomnožimo sve s $2L$. Tada slijedi:

$$\phi_2 = \frac{4\pi L}{\lambda_0} - 2\pi\frac{m^2 gL^2\lambda_0\sin\psi}{h^2} \tag{33}$$

Napokon dobivamo razliku u fazi dva snopa za nerelativistički slučaj:

$$\Delta\phi = 2\pi\frac{m^2 gL^2\lambda_0\sin\psi}{h^2} \quad [\mathbf{3\,boda}] \tag{34}$$

b.) Za relativistički slučaj zakon očuvanja energije poprima sljedeću formu:

$$\sqrt{\frac{h^2c^2}{\lambda_0^2} + m^2c^4} = \sqrt{\frac{h^2c^2}{\lambda^2} + m^2c^4} + mgH. \quad [\mathbf{2\,boda}] \tag{35}$$

Kvadriranjem i sređivanjem dobivamo (zanemarujući član $m^2g^2H^2$):

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_0}\sqrt{1 - \frac{2mgH\lambda_0}{hc}\sqrt{1 + \frac{m^2c^2\lambda_0^2}{h^2}}} \approx \frac{1}{\lambda_0}\sqrt{1 - \frac{2mgH\lambda_0}{hc}}. \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{36}$$

U unutarnjem korijenu smo zanemarili drugi član koji je puno manji od 1 (ultrarelativistički limit) jer je sami faktor koji množi unutarnji korijen puno manji od 1, pa je to doprinos drugog reda. Za prvi snop ukupna promjena faze ima isti oblik kao i za nerelativsitički slučaj ([**1 bod**]), dok za drugi snop vrijedi:

$$\Delta\phi_2(H) = \frac{2\pi\Delta l}{\lambda_0}\sqrt{1 - \frac{2mgH\lambda_0}{hc}} \approx \frac{2\pi\Delta l}{\lambda_0}\left(1 - \frac{mgH\lambda_0}{hc}\right). \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{37}$$

Kao i u nerelativističkom slučaju javlja se konstantni i linearni član u H, te je ukupna promjena faze na intervalu za drugi snop:

$$\phi_2 = \frac{4\pi L}{\lambda_0} - 2\pi\frac{mgL^2\sin\psi}{hc}, \tag{38}$$

tj. razlika u fazi dva snopa za ultrarelativistički slučaj je:

$$\Delta\phi = 2\pi\frac{mgL^2\sin\psi}{hc}. \quad [\mathbf{3\,boda}] \tag{39}$$

Napomena: Isti rezultat se dobije ako umjesto jednadžbe (35) krenemo s izrazom:

$$\frac{hc}{\lambda_0} = \frac{hc}{\lambda} + mgH. \tag{40}$$

c.) Elektron kinetičke energije 400 MeV je ultrarelativistički (energija mirovanja elektrona je 0.511 MeV), pa je razlika u fazi dva snopa dana sa (39). **[2 boda]**
Minimalna udaljenost L se dobije kad je razlika u fazi jednaka π za $\psi = 90°$:

$$\pi = 2\pi\frac{mgL^2\sin(90°)}{hc} \Rightarrow L = \sqrt{\frac{hc}{2mg}} = 105.46\,\mathrm{m}. \quad [\mathbf{2\,boda}] \tag{41}$$